Préambule

1. Sauf mention contraire, dans tout le problème, x désigne un réel strictement positif et n désigne un entier strictement positif.

2. On définit les applications suivantes :

$$\Gamma : \mathbf{R}_*^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

$$x \longrightarrow \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

$$\Pi : \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

$$(x, n) \longrightarrow \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, dt$$

$$\Phi_N : \mathbf{R}_*^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

$$x \longrightarrow x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

où γ est une constante qu'on déterminera par la suite et N un entier strictement positif.

3. Le but de la première partie est l'étude des fonctions Γ, Π et Φ_N. Le but de la deuxième partie est de montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_*^+, \quad \lim_{n \to \infty} \Pi(x, n) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\Phi_N(x)} = \Gamma(x).$$

Enfin, la troisième partie établit un lien entre $\Gamma(x)$ et l'intégrale multiple :

$$I_n = \int \dots \int_D f(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \, t_1^{a_1 - 1} \dots t_n^{a_n - 1} \, dt_1 \dots dt_n \quad \text{avec } f \text{ continue,}$$

$a_i \geqslant 1 \ (i = 1, \dots, n)$, $D = \left\{ t_i, \ t_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1 \right\}$.

4. Toutes les parties peuvent se traiter indépendamment en admettant les résultats des parties précédentes.

I

1. Étudier l'ensemble de définition et la continuité de $\Gamma(x)$.

Montrer que la fonction $\Gamma(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}_*^+$, avec $\Gamma'(x) = \int_0^\infty (\ln t) \, t^{x-1} e^{-t} \, dt$.

2. Montrer que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(x)$ pour $x \in \mathbf{N}^*$.

3. Montrer que :

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{x-1}\, d\tau = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 \tau^{x-n-1}\, d\tau.$$

4. En déduire que

$$\Pi(x, n) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

5. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)}\, dt.$$

a. Calculer u_n.

b. Montrer que la série de terme général u_n converge. En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \text{ existe.}$$

On note γ cette limite.

6. Soit $g_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$, avec $N \in \mathbf{N}^*$, $N < n$.

a. Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant N$, alors $|g_n(x)| \leqslant \frac{N^2}{2n^2}$.

b. En déduire que la fonction $S(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} g_n(x)$ existe et est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

c. Montrer que $S(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que $S'(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} g_n'(x)$.

d. En déduire que :

$$\Phi(x) = \lim_{N\to\infty} \Phi_N(x)$$

est une fonction définie, continûment dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ avec $\Phi(1) = 1$ et $\Phi'(1) = \gamma$.

II

1. Montrer que :

$$\Phi(x) = x \lim_{n\to\infty} n^{-x} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{i}\right)$$

et que :

$$n^{-x} = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-x}.$$

2. En déduire que :

$$\Phi(x) = x \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{i}\right)\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-x}$$

puis que :

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(x, n) = \frac{1}{\Phi(x)}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+^*.$$

3. *a.* Montrer que :

$$(1 - y)^{-1} \geqslant e^{y} \geqslant 1 + y, \qquad 0 \leqslant y < 1.$$

En déduire que :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geqslant e^{-t} \geqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}, \qquad \forall\, t, \quad 0 \leqslant t < n.$$

b. En déduire :

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \leqslant e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n}\right), \qquad \forall\, t, \quad 0 \leqslant t < n.$$

c. En montrant que :

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n} \leqslant \frac{t^2}{n}, \qquad \forall\, t, \quad 0 \leqslant t < n,$$

prouver que :

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \leqslant e^{-t}\frac{t^2}{n}, \qquad \forall\, t, \quad 0 \leqslant t < n.$$

4. Montrer que $\forall\, x \in \mathbf{R}_*^+$:

$$\lim_{n \to \infty} \Pi(x, n) = \Gamma(x).$$

En déduire $\Gamma'(1)$ en fonction de γ.

III

On définit :

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, \mathrm{d}x, \qquad (p, q) \in \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^+.$$

1. *a.* Montrer que $\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(p + 1, q) + \mathrm{B}(p, q + 1)$ et $\mathrm{B}(p, q + 1) = \dfrac{q}{p}\,\mathrm{B}(p + 1, q)$.

En déduire que :

$$\mathrm{B}(p, q + 1) = \frac{q}{p + q}\,\mathrm{B}(p, q).$$

b. Montrer que $\mathrm{B}(x, n + 1) = n^{-x}\,\Pi(x, n)$ et en déduire :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} n^{x}\,\mathrm{B}(x, n).$$

2. Soient m et n deux réels, $m > \dfrac{1}{2}$, $n > \dfrac{1}{2}$ et la fonction :

$$f(x, y) = e^{-x^2 + y^2}\, x^{2m-1}\, y^{2n-1}.$$

a. Montrer que :

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4 \lim_{R \to \infty} \int_0^R \int_0^R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

b. Par un changement de coordonnées, montrer que :

$$\iint_{Q_R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} (\rho\cos\theta)^{2m-1} (\rho\sin\theta)^{2n-1}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

où Q_R est le quadrant centré à l'origine et de rayon R.

c. En déduire l'égalité :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

puis calculer, à l'aide de **I.2.** :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta\,d\theta, \quad m \in \mathbf{N}^*.$$

d. Montrer que :

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

et, à l'aide du 1., généraliser ce résultat à $(m, n) \in (\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*)$.

3. On définit $I_n = \iint \dots \int_D f(t_1 + t_2 + \dots + t_n) t_1^{a_1-1} \dots t_n^{a_n-1}\,dt_1 \dots dt_n$, où f est continue, $a_i \geqslant 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, l'intégration se faisant sur les valeurs positives telles que $t_1 + t_2 + \dots + t_n \leqslant 1$.

On définit également pour $0 \leqslant t_3 \leqslant 1$:

$$I^*(t_3) = \int_0^{1-t_3} \int_0^{1-t_2-t_3} f(t_1 + t_2 + t_3)\, t_1^{a_1-1} t_2^{a_2-1}\,dt_1\,dt_2.$$

a. Montrer que si $\forall t \in [0, 1]$, $f(t) = 1$ et $n = 2$, on a :

$$I_2 = \frac{1}{a_1 + a_2} B(a_1, a_2).$$

b. En posant $t_1 = \frac{(1-v)}{v} t_2$, montrer que

$$I^*(t_3) = \int_0^1 \int_0^{(1-t_3)v} f\left(t_3 + \frac{t_2}{v}\right) (1-v)^{a_1-1} v^{-a_1-1} t_2^{a_1+a_2-1}\,dv\,dt_2.$$

c. En déduire :

$$I^*(t_3) = B(a_1, a_2) \int_0^{1-t_3} f(t_3 + \tau_2)\,\tau_2^{a_1+a_2-1}\,d\tau_2.$$

d. En déduire :

$$I_n = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\dots\Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \int_0^1 f(\tau)\,\tau^{\sum_{i=1}^n a_i - 1}\,d\tau.$$

Historiquement, la fonction $\Gamma(x)$ a été d'abord développée par Euler sous sa forme intégrale, la fonction $B(p, q)$ porte le nom d'*Intégrale d'Euler de première espèce* et a été développée par Euler et Legendre. Le lien avec la fonction Φ est dû à Weierstrass et le lien avec l'intégrale multiple I_n est dû à Dirichlet.